Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 14 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(3+2 Punkte)* Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Zeige, dass jede Teilmenge $U \subset X$ präkompakt ist, falls X präkompakt ist.

(b) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *relativ kompakt*, falls ihr Abschluss $\overline{U} \subset X$ kompakt ist. Zeige, dass eine relativ kompakte Teilmenge $U \subset X$ stets präkompakt ist.

Lösung.

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle dann $x_1, \ldots, x_N \in X$ $(N \in \mathbb{N})$, so dass

$$X = \bigcup_{n=1}^{N} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_n).$$

Das geht wegen der Präkompaktheit von X. Durch Änderung der Reihenfolge der x_j können wir sogar erreichen, dass

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_n) \cap U \neq \emptyset \quad \text{für} \quad n \leq M$$

und

$$B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_n) \cap U = \emptyset \quad \text{für} \quad n > M\,,$$

wo $M \in \mathbb{N}_0$ mit $M \leq N$. Wähle nun für $n \in \mathbb{N}$, $n \leq M$, je ein $u_n \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_n)$. Dann gibt es also für jedes $u \in U$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$d(u, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach der Dreiecksungleichung folgt somit

$$d(u, u_n) \leq d(u, x_n) + d(x_n, u_n) < \varepsilon$$

und dann

$$U \subset \bigcup_{n=1}^{M} B_{\varepsilon}(u_n)\,.$$

Also ist auch U präkompakt.

(b) Nach Voraussetzung ist $\bar{S}$ kompakt und deshalb präkompakt. Nach Teil (a) ist dann auch S präkompakt.

■

Aufgabe 2: *(1 Punkt)* Zeige, dass $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}$ *nicht* kompakt in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist.

Lösung. Wir geben eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung an: Sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Familie offener Intervalle

$$U_n = \left(n - \frac{3}{2}, n - \frac{1}{2}\right).$$

Sie erfüllt

$$\mathbb{N}_0 \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n,$$

ist also eine offene Überdeckung von $\mathbb{N}_0$. Jedes U_n enthält aber nur ein Element von $\mathbb{N}_0$, denn $U_n \cap \mathbb{N}_0 = \{n-1\}$. Da $\mathbb{N}_0$ unendlich ist, kann also $\mathbb{N}_0$ nicht kompakt sein. ■

Aufgabe 3: *(2+2 Punkte)* Betrachte die Abbildung $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$d(x,y) := \begin{cases} \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \\ \left|\frac{1}{x}\right| & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y = 0 \\ \left|\frac{1}{y}\right| & \text{falls } x = 0 \text{ und } y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = y = 0 \end{cases} \qquad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeige, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeige, dass $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}$ kompakt in $(\mathbb{R}, d)$ ist.

Lösung.

(a) Wir müssen Positivität, Definitheit, Symmetrie und Dreiecksungleichung für d zeigen. Positivität und Symmetrie folgen direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von $|\cdot|$ bzw. der Definition von d. Die Definitheit von d folgt, weil für $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y-x|}{|xy|} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-y| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y.$$

Die Dreiecksungleichung folgt auch wieder aus der entsprechenden Eigenschaft von $|\cdot|$,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right| + \left|\frac{1}{z} - \frac{1}{y}\right| = d(x,z) + d(z,y) \\ d(x,y) &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{y}\right| = d(x,0) + d(0,y) \\ d(x,0) &= \left|\frac{1}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{y}\right| = d(x,y) + d(y,0) \end{aligned}$$

für $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die übrigen Fälle folgen analog.

(b) Wir zeigen, dass es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, $x_n \in X$, mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und verwenden dann die in Aufgabe 2 von AdT 13 gezeigte Aussage. Betrachte dazu die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$d(x_n, 0) = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Also $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Damit ist aber

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{\ x_n \mid n \in \mathbb{N}\ \} \cup \{0\}$$

kompakt nach Aufgabe 2 von AdT 13.

■